

**Aufgabe 3.3** Die Automorphismengruppe  $\text{Aut}(K, \mathbb{Q})$  ist nach Beispiel 14.15 isomorph zur Einheitsgruppe von  $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ . Es ist  $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^* = \{a \in \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} : \text{ggT}(a, 16) = 1\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ . Es gibt Elemente der Ordnung 4, aber nicht der Ordnung 8, also ist  $\text{Aut}(K, \mathbb{Q}) \cong C_4 \times C_2$ .

$\zeta^4$  ist Einheitswurzel der Ordnung 4, das zugehörige Minimalpolynom  $X^2 + 1$  hat Grad 2. Da  $\zeta^4 \in K$  liegt, ist  $F := \mathbb{Q}(\zeta^4)$  der gesuchte Teilkörper von  $K$ .