

Aufgabe 2.3

- d) Analog zu Teil c) kann mithilfe des Bahnenlemmas die Ordnung von $B_n(K)$ bestimmt werden. Betrachte dazu die Bahn von e_1 . Es gilt $\theta_{e_1} = \{(a, 0, \dots, 0)^T \mid a \in K^\times\}$. Für den Stabilisator gilt

$$\text{Stab}_G(e_1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \dots * \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \mid A \in B_{n-1}(K) \right\}.$$

Wir erhalten $|G| = |\theta_{e_1}| \cdot |\text{Stab}_G(e_1)| = (q-1) \cdot q^{n-1} \cdot |B_{n-1}(K)|$.

Mit Induktion bestimmt man die Formel für die Ordnung von $B_n(K)$. Wir erhalten:

$$|B_n(K)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (q-1)^n.$$

Für $U_n(K)$ bestimmen wir analog die Ordnung $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.