Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, I.Köster, A.Zvonareva

Übungsklausur

Hinweis: Beachten Sie bitte, dass alle Antworten zu begründen sind.

Aufgabe 1:

(5P.) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel ? Geben Sie andernfalls eine Zerlegung an.

a) $x^4 + x^2 + 1 \in F_2[x]$

b) $x^5 + 6x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$

c) $x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 2:

(4P.) Zerlegen Sie 2 in $\mathbb{Z}[i]$ in ein Produkt von irreduziblen Elementen.
Wie eindeutig ist diese Zerlegung ?

Aufgabe 3:

(4P.) Sei G eine Gruppe der Ordnung 12. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) G hat Elemente der Ordnung 2 und 3.

(b) G besitzt eine normale Sylowgruppe.

(c) Zu jedem Teiler d von $|G|$ gibt es eine Unterguppe U mit $|U| = d$.

Aufgabe 4:

(4P.) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit $|G| = 440$ auflösbar ist.

Aufgabe 5:

(5P.) a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 300.
b) Bestimmen Sie die Elementarteilerzerlegung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6:

(2P.) Wieviele Elemente hat ein endlicher Körper ? Wie beweist man dies ?

Aufgabe 7:

(4P.) Sei L der Zerfällungskörper von $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 - 2)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(L, \mathbb{Q})$.

Aufgabe 8:

(4P.) Ist der Körper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$? Bestimmen Sie ein Element z mit $L = \mathbb{Q}(z)$ und einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ mit $|K : \mathbb{Q}| = 2$ und $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $K \neq \mathbb{Q}(i)$.