Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, I.Köster, A.Zvonareva

Modul - Klausur 31.8.2016

Hinweis: Beachten Sie bitte, dass alle Antworten zu begründen sind.
Sätze, die in der Vorlesung bewiesen wurden, können Sie ohne Beweis verwenden, wenn es nicht ausdrücklich anders verlangt wird.
Wer 20 Punkte erreicht, hat bestanden. Wer 39 Punkte erreicht, erhält die Note 1,0.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine.

Aufgabe 1 [9 Punkte]

Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel? Geben Sie im Fall, dass ein Polynom nicht irreduzibel ist, eine Zerlegung in ein Produkt von irreduziblen normierten Polynomen an. Wie eindeutig ist die Zerlegung?

a) $x^5 + 10x - 5 \in \mathbb{Q}[x]$

b) $x^4 + x + 1 \in F_2[x]$

c) $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 2 [7 Punkte]

Sei G eine endliche Gruppe.

(a) Wie lautet der Satz von Lagrange über Untergruppen von G?

(b) Skizzieren Sie den Beweis des Satzes von Lagrange.

(c) Beweisen Sie, dass es in A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 gibt.

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Geben Sie die Defintion für Auflösbarkeit einer Gruppe an. Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit $|G| = 135$ auflösbar ist.

Aufgabe 4 [3 Punkte]

a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 36. Geben Sie jeweils die Elementarteilerzerlegung und die Sylowzerlegung an.
b) Sind alle Gruppen der Ordnung 36 abelsch? Geben Sie ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

Aufgabe 5 [2 Punkte]

Sei $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen und J ein Ideal von S.
Zeigen Sie: $\varphi^{-1}(J)$ ist ein Ideal von R.

Aufgabe 6 [7 Punkte]

Zeigen Sie, dass der Körper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.
Berechnen Sie $\mathrm{Aut}(L, \mathbb{Q})$ und bestimmen Sie alle Teilkörper von L.
Bestimmen Sie ein Element z mit $L = \mathbb{Q}(z)$.

Aufgabe 7 [5 Punkte]

Beweisen Sie, dass die Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Aufgabe 8 [8 Punkte]

Beweisen Sie, dass das Polynom $x^5 - 9x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ nicht durch Radikale lösbar ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass das Polynom genau drei reelle Nullstellen besitzt.