Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

a) Sei K ein Teilkörper des Körpers L. Zeigen Sie, dass dann L zu einem K - Vektorraum wird, indem die Skalarmultiplikation durch die Multiplikation in L definiert wird, die Addition ist jene von L.

b) Konstruieren Sie Körper mit 4, 8 und 16 Elementen mit Hilfe geeigneter irreduzibler Polynome von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.

c) Zeigen Sie, dass ein endlicher Körper Primzahlpotenzordnung besitzt.

Aufgabe 2:

Sei R mit Normfunktion ν ein Euklidischer Ring. Setze $R^+ := R \setminus \{0\}$. Definiere

$$\mu : R^+ \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{durch} \quad \mu(a) := \min\{\nu(ca); c \in R^+\}.$$

Zeigen Sie:

a) R ist mit μ als Normfunktion auch ein Euklidischer Ring.

b) Es gilt zusätzlich, dass $\mu(a) < \mu(a \cdot c)$, wenn c keine Einheit von R ist.

c) In einem Euklidischen Ring lässt sich jede Nichteinheit als endliches Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

d) Euklidische Ringe sind faktoriell. (Hinweis: Sie können Lemma 9.6 benutzen.)

Aufgabe 3:

a) Seien $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden, dann zeigen Sie, dass $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i) - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome von Grad 2 in $\mathbb{F}_p[x]$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie ob diese Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind, andernfalls bestimmen Sie ihre irreduziblen Teiler:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$

b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$

c) $x^3 - 13x - 2$

d) $x^4 + x + 1$

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie: $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ sind irreduzible Elemente von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, sie sind jedoch nicht prim. Zeigen Sie hierzu, dass die Abbildung $\beta : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \longrightarrow \mathbb{N}_o$ definiert durch $z \mapsto z \cdot \bar{z}$ multiplikativ ist, d.h. dass gilt:

$$\beta(z_1 \cdot z_2) = \beta(z_1) \cdot \beta(z_2).$$

b) Berechnen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

c) Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Euklidischer Ring, ist es ein Hauptidealring ?