Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, I ein Ideal in R. Zeigen Sie: I ist ein Primideal genau dann, wenn R/I ein Integritätsring ist.

Aufgabe 2:

Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie: $R[x]$ ist ein Hauptidealring genau dann, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 3:

Sei R ein kommutativer Ring und I, J, J_1, J_2 Ideale in R. Sei $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$, $IJ = \{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \mid x_i \in I, y_i \in J\}$. Zeigen Sie dass $I + J$ und IJ Ideale in R sind.Welche der folgenden Aussagen sind stets korrekt?

a) $I(J_1 + J_2) = IJ_1 + IJ_2$

b) $IJ = I \cap J$

c) $IJ \subseteq I \cap J$

d) $I + J \subseteq I \cap J$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die letzte Ziffer von 17^{68} und die letzten beiden Ziffern von 14^{200}.

Aufgabe 5:

schriftlich bis Montag 06.6, abzugeben in den Gruppenübungen

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ ist kein Körper.

b) $\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z}[i]$ ist ein Körper mit 9 Elementen.

b) $\mathbb{Z}[i]/n\mathbb{Z}[i]$ ist ein Körper genau dann, wenn n eine Primzahl ist und $n \neq a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$.