Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Elementarteilerzerlegung und die Sylowzerlegung der abelschen Gruppe

$$C_{20} \times C_{15} \times C_{12}.$$

b) Bestimmen Sie die Elementarteilerzerlegung von $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$.

c) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung p^4 mit p Primzahl. Zeigen Sie, dass die angegebenen Gruppen paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Ein endlicher Integritätsring ist ein Körper.

Aufgabe 3:

Sei R ein Integritätsring. $D : R[x] \longrightarrow R[x]$ sei definiert durch $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.
Zeigen Sie:

(i) D ist R - linear, d.h. $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)\ \forall f, g \in R[x],\ \forall a, b \in R$.

(ii) $D(fg) = fD(g) + D(f)g\ \forall f, g \in R[x]$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie alle zweiseitigen Ideale von

a) $\mathbb{Z}$.

b) $k[x]$, wobei k ein Körper ist.

c) $M_n(k)$, wobei k ein Körper ist.

d) $M_n(R)$, wobei R ein Ring mit 1 ist.

Aufgabe 5:

schriftlich bis Montag 30.5, abzugeben in den Gruppenübungen

Zeigen Sie dass $\mathbb{Z}[i] := \{n + mi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Euklidischer Ring ist. Bestimmen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.

Hinweis: Nehmen Sie $N(n + mi) = n^2 + m^2$ als Norm-Funktion.