 W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 6

Alle folgenden Aufgaben sind ehemalige Scheinklausur-bzw. Klausuraufgaben.

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe und sei S eine Teilmenge von G, die G erzeugt.

a) Sei H eine Gruppe und seien ϕ und ψ Gruppenhomomorphismen von G nach H. Zeigen Sie: Falls $\phi(s) = \psi(s)$ für alle $s \in S$ ist, dann gilt $\phi = \psi$.

b) Wie viele verschiedene Gruppenhomomorphismen gibt es von S_3, der symmetrischen Gruppe der Ordnung 6, nach C_2, der zyklischen Gruppe der Ordnung 2?

Aufgabe 2:

Sei p eine Primzahl, G eine endliche Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G, sodass p kein Teiler von $[G : N]$ ist.

a) Zeigen Sie: Falls $P \in Syl_p(N)$ und $Q \in Syl_p(G)$ ist, dann gilt $|P| = |Q|$.

b) Zeigen Sie: $Syl_p(N) = Syl_p(G)$.

Aufgabe 3:

Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 200 an.

Aufgabe 4:

(Angabe von Satz 5.4 (Korrespondenzsatz) genügt nicht zur Lösung.)

Sei N eine normale Untergruppe von G und L eine normale Untergruppe von G/N.

a) Zeigen Sie, dass es eine normale Untergruppe K von G gibt mit $N \subseteq K$, so dass $L = K/N = \{kN : k \in K\}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : G/N \to G/K$, definiert durch $\phi(gN) = gK$ für $g \in G$, ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Bestimmen Sie den Kern von ϕ.

Aufgabe 5:

Sei $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sei $X = Y \times Y$ und sei $G = S_5$, die symmetrische Gruppe vom Grad fünf. Sei $\sigma(a_1; a_2) = (\sigma(a_1); \sigma(a_2))$ für $\sigma \in S_5$ und $(a_1; a_2) \in X$.

a) Zeigen Sie, dass dies eine Gruppenoperation von G auf X definiert.

b) Zeigen Sie, dass es unter dieser Operation genau zwei Bahnen gibt.

c) Geben Sie Elemente $x_1, x_2 \in X$ an mit $Stab_{S_5}(x_1) \simeq S_4$ und $Stab_{S_5}(x_2) \simeq S_3$.

Formulieren Sie eine Formel, die einen Zusammenhang herstellt zwischen der Ordnung des Stabilisators eines Elementes und der Mächtigkeit seiner Bahn.

Aufgabe 6:

Sei G eine Gruppe und seien $\{e\} \lhd G_1 \lhd G$ und $\{e\} \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = G$ Kompositionsreihen von G.

a) Zeigen Sie, dass $r \geq 2$.

b) Zeigen Sie: Falls $H_{r-1} = G_1$, dann gilt $r = 2$. Angenommen $H_{r-1} \neq G_1$.

c) Zeigen Sie, dass $H_{r-1} \cap G_1 = \{e\}$ und $H_{r-1}G_1 = G$. Folgern Sie, dass $r = 2$.

Aufgabe 7:

Seien p eine Primzahl, F_p der Körper mit p Elementen und $G = \{(a_{ij}) \in GL_3(F_p) : a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}$, die Gruppe aller invertierbarer oberer (3×3)-Dreiecksmatrizen.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von G.

b) Finden Sie eine p-Sylowuntergruppe von G, und zeigen Sie, dass G genau eine p-Sylowuntergruppe besitzt. Sei nun $p = 3$.

c) Finden Sie eine 2-Sylowuntergruppe von G. Ist diese normal in G?

d) Besitzt G ein Element der Ordnung 4?

Aufgabe 8:

Seien G und H endliche Gruppen, X eine endliche Menge und S_X die symmetrische Gruppe auf X.

a) Sei $\psi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $\psi(g)$ ein Teiler der Ordnung von g ist.

b) Sei durch $G \times X \to X$, mit $(g, x) \to gx$, eine Operation der Gruppe G auf der Menge X gegeben. Zeigen Sie, dass $\phi : G \to S_X \; g \to [\phi(g) : x \to gx]$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Sei G eine Gruppe, die von je einem Element der Ordnung 7, 11 und 13 erzeugt wird. Zeigen Sie, dass es keine transitive Operation von G auf einer Menge mit acht Elementen geben kann. Hinweis: Die Gruppenoperation von G auf X heisst transitiv, falls es genau eine Bahn unter der Operation von G auf X gibt.