Algebra
SS 2016

W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und $G = (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, +)$. Für $0 \leq i \leq m$ sei $U_i := < p^i + p^m\mathbb{Z} >$. Zeigen Sie, dass die U_i die einzigen Untergruppen von G sind und dass G genau eine Kompositionsreihe besitzt.

Hinweis (aus der Linearen Algebra sollte bekannt sein): Sind $a, b \in \mathbb{N}$, dann gibt es $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \cdot a + z_2 \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Aufgabe 2:

a) Sei G eine Gruppe der Ordnung 72 und sei N ein Normalteiler von G der Ordnung 8. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der Ordnung 24 besitzt. Ist diese Untergruppe normal?

b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 80 gibt.

Aufgabe 3:

Sei G eine Gruppe der Ordnung pq, wobei p und q zwei verschiedene Primzahlen sind.

a) Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

b) Zeigen Sie, wenn $p \not\equiv 1 \mod q$ und $q \not\equiv 1 \mod p$, dann ist G zyklisch.

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q zwei verschiedene Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass entweder G eine normale p - Sylowuntergruppe oder eine normale q - Sylowuntergruppe besitzt. Ist G auflösbar?

Hinweis: Vergleichen Sie, wie $|G| = 12$ in der Vorlesung behandelt wurde.

Aufgabe 5:

schriftlich bis Montag 9.5, abzugeben in den Gruppenübungen

Sei G eine Gruppe der Ordnung $6125 = 5^3 7^2$.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylowuntergruppen und der 7-Sylowuntergruppen von G.

b) Ist eine Gruppe der Ordnung 6125 immer auflösbar?