W.Kimmerle, A.Zvonareva

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

a) Sei G eine Gruppe und sei $h : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann und nur dann h ein Isomorphismus ist, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $h' : H \to G$ gibt, so dass $h \circ h' = id_H$ und $h' \circ h = id_G$ ist.

b) Sei G eine Gruppe und sei H ein Normalteiler von G, sei K ein Normalteiler von H, ist K ein Normalteiler von G?

Aufgabe 2:

Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung 6 (bis auf Isomorphie).
Hinweis: Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 6 abelsch ist, wenn alle zyklischen Untergruppen normal sind.

Aufgabe 3:

Sei G eine Gruppe. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe $G' = \langle [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G\rangle$ heißt die Kommutatorgruppe von G. Die Kommutatorgruppe von G' bezeichnen wir mit $G^{(2)}$, allgemeiner definiert man rekursiv die höheren Kommutatorgruppen durch $G^{(k+1)} := (G^{(k)})'$ für $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle höheren Kommutatorgruppen von G, wenn

a) $G = D_8$, die Diedergruppe (die Symmetriegruppe eines Quadrats) ist.

b) $G = Q_8$, die Quaternionengruppe ist.

Sind diese Gruppen auflösbar?

Aufgabe 4:

Sei G eine abelsche Gruppe mit 8 Elementen von Ordnung 3, 18 Elementen von Ordnung 9 und keine anderen Elemente außer der Identität. Beschreiben Sie G als ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen.

Aufgabe 5:

schriftlich bis Montag 2.5. , abzugeben in den Gruppenübungen

a) Sei σ in S_n ein k - Zykel. Zeigen Sie: $\sigma \in A_n$ genau dann, wenn k ungerade ist.

b) Verwenden Sie a), um ein Kriterium anzugeben, wann eine beliebige Permutation von S_n gerade, also ein Element von A_n ist.

c) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen von A_5.