Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ den Zentralisator

$$C_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(S) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}); AS = SA\} \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist dieser Zentralisator eine Untergruppe bzw. ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?.

Aufgabe 2:

Sei G die Symmetriegruppe eines Quadrats (d.h. G besteht aus allen Bewegungen der Euklidischen Ebene, die ein Quadrat in sich überführen).

a) Beschreiben Sie G als Permutationsgruppe auf der Eckenmenge des Quadrats.

b) Berechnen Sie das Zentrum $Z(G) := \{g \in G; g \cdot x = x \cdot g \ \ \forall x \in G\}$.

c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G und ordnen Sie diese mit Inclusion.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, ist G eine Gruppe und $h \in G$ fest, dann ist $\gamma_h(g) = h^{-1}gh$ ein Automorphismus von G. Solche Automorphismen nennt man innere Automorphismen.
b) Zeigen Sie: Die inneren Automorphismen einer Gruppe bilden einen Normalteiler der Gruppe aller Automorphismen von G.

Aufgabe 5:

schriftlich bis Montag 18.4., abzugeben in den Gruppenübungen

(i) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt von disjunkten Zykeln. Finden Sie die Ordnung von σ.

(ii) Zeigen Sie, dass S_n von den n-1 Transpositionen $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)$ erzeugt wird.

(iii) Zeigen Sie, dass $S_n = \langle (1, 2, \cdots, n), (1, 2) \rangle$.

(iiii) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(S_n)$.