

Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe, die auf einer Menge von p Elementen transitiv operiert. Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung $G \rightarrow S_p$ einen p -Zyklus enthält.

Aufgabe 2:

Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel, mit genau $p - 2$ Nullstellen in \mathbb{R} , wobei $\text{Grad}(f) = p - 1$ prim, sei L der Zerfällungskörper von f . Zeigen Sie: $\text{Gal}(f) = S_p$.

Aufgabe 3:

Sei L der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms in $K[x]$. Zeigen Sie: Hat ein irreduzibles Polynom g von $K[x]$ eine Nullstelle in L , dann sind alle Nullstellen von g in L .

Aufgabe 4:

Sei $a = \sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(ia^2)$ ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Q}(a + ia)$ ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}(ia^2)[x]$, aber $\mathbb{Q}(a + ia)$ ist kein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 5:

Sei L der Zerfällungskörper von $f = x^4 - x^2 + 1$ über \mathbb{Q} . Sei $G = \text{Gal}(f)$.

- Bestimmen Sie G .
- Bestimmen Sie die quadratischen Erweiterungen (d.h. jene Zwischenkörper Z mit $[Z : \mathbb{Q}] = 2$) von \mathbb{Q} in L .