

## Übungsblatt 12

### Aufgabe 1:

Sei  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe, die auf einer Menge von  $p$  Elementen transitiv operiert. Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung  $G \rightarrow S_p$  einen  $p$ -Zyklus enthält.

### Aufgabe 2:

Sei  $f \in \mathbb{Q}[x]$  irreduzibel, mit genau  $p - 2$  Nullstellen in  $\mathbb{R}$ , wobei  $\text{Grad}(f) = p - \text{prim}$ , sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f$ . Zeigen Sie:  $\text{Gal}(f) = S_p$ .

### Aufgabe 3:

Sei  $L$  der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms in  $K[x]$ . Zeigen Sie: Hat ein irreduzibles Polynom  $g$  von  $K[x]$  eine Nullstelle in  $L$ , dann sind alle Nullstellen von  $g$  in  $L$ .

### Aufgabe 4:

Sei  $a = \sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}^+$ . Zeigen Sie:  $\mathbb{Q}(ia^2)$  ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms  $f \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{Q}(a + ia)$  ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms  $f \in \mathbb{Q}(ia^2)[x]$ , aber  $\mathbb{Q}(a + ia)$  ist kein Zerfällungskörper eines Polynoms  $f \in \mathbb{Q}[x]$ .

### Aufgabe 5:

Sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f = x^4 - x^2 + 1$  über  $\mathbb{Q}$ . Sei  $G = \text{Gal}(f)$ .

- Bestimmen Sie  $G$ .
- Bestimmen Sie die quadratischen Erweiterungen (d.h. jene Zwischenkörper  $Z$  mit  $[Z : \mathbb{Q}] = 2$ ) von  $\mathbb{Q}$  in  $L$ .