Algebra **Prof.Dr.W.Kimmerle**
SS 2016

Übungsblatt 1

Übungen zur Algebra

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Eine endliche Gruppe ist nicht Vereinigung zweier echter Untergruppen.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Besitzt eine Gruppe nur endlich viele Untergruppen, dann ist sie endlich.

Aufgabe 3:

Bezeichne GL$(3,3)$ die Gruppe der regulären oberen 3 x 3 - Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dem Körper mit drei Elementen. Sei $U := \{A = (a_{ij}) \in GL(3,3);\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1\}$. U besteht also aus jenen oberen Dreiecksmatrizen, die auf der Hauptdiagonalen überall die 1 des Körpers haben.
Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von $GL(3,3)$ ist. Berechnen Sie die Anzahl ihrer Elemente und welche Ordnung ein Element von U haben kann.

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt ?

a) Wenn jedes vom Einselement verschiedene Gruppenelement von G die Ordnung 2 besitzt, dann ist G abelsch.
b) Ist U eine Untergruppe vom Index 2 in G, dann ist U ein Normalteiler von G.
c) Ist U eine Untergruppe vom Index 3 in G, dann ist U ein Normalteiler von G.
d) Ist jedes vom Einselement e verschiedene Gruppenelement von G die Ordnung 3 besitzt, dann ist G abelsch.

Aufgabe 5:

Sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt:

(i) $o(\varphi(g)) \mid o(g)$.
(ii) Ist M ein Normalteiler von H, dann ist $\varphi^{-1}(M)$ ein Normalteiler von G.
(iii) Ist N ein Normalteiler von G, dann ist $\varphi(N)$ ein Normalteiler von H.
iv) Ist U eine Untergruppe von G und $\varphi(U)$ invariant unter allen Automorphismen von H, dann ist $\varphi(U)$ ein Normalteiler von H.