A3, Blatt 13

$f = x^5 - 2$ Nullstellen sind

$\omega, \omega\zeta, \omega\zeta^2, \omega\zeta^3, \omega\zeta^4$ mit $\omega = \sqrt[5]{2}$, $\zeta = e^{2\pi i/5}$

$\rightarrow L = \mathbb{Q}(\omega, \zeta)$, $\zeta \notin \mathbb{Q}(\omega) \rightarrow |L : \mathbb{Q}| > 20$, $L \supsetneq \mathbb{Q}(\omega)$.

f ist durch Radikale lösbar $\xrightarrow{17.6.}$ $Gal(f) = Aut(L, \mathbb{Q})$ ist auflösbar

$\zeta \in L \rightarrow L \supsetneq \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $|\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}| = 4$

ζ hat als Min.pol $\Phi_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Somit

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[dr, dash, "5"'] & & \mathbb{Q}(\zeta) \arrow[dl, dash, "4"] \arrow[r, "15.9."] & & U_1 \arrow[dr, dash, "5"'] & & U_2 \arrow[dl, dash, "4"] \\
 & \mathbb{Q} & & & & G &
\end{tikzcd}$$

$U_2 \trianglelefteq G$, da $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ Galoiserw.

Setzt man $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $d = 5$, dann ist nach 17.4 $L = K(\omega)$ eine Galoiserweiterung
und $\omega^5 = 2 \in K$ und $Aut(L, K)$ ist abelsch.

$|L = K(\omega) : K| = 5$; denn nach 13.10 b) ist $|K(\omega) : K| \leq 5 \rightarrow |L : \mathbb{Q}| \leq 20$.

$|L = K(\omega) : K| = |L : \mathbb{Q}(\zeta)|$ (ebenso $|K(\omega) : K| = \mu_\omega$.)

Da Minpol. von ω über K könnte kleineren Grad als f besitzen

Wenn aber 5 teilt $|L : \mathbb{Q}|$ und 4 teilt $|L : \mathbb{Q}|$ $\rightarrow |L : \mathbb{Q}| = 20$

$G = Gal(f)$ hat also einen Normalteiler vom Index (nämlich U_2),
d.h. 5-Sylowgruppe ist normal.

$G/U_2 \cong U_1$ denn $|U_1| = 4$. $U_1 = Aut(L, \mathbb{Q}(\omega))$

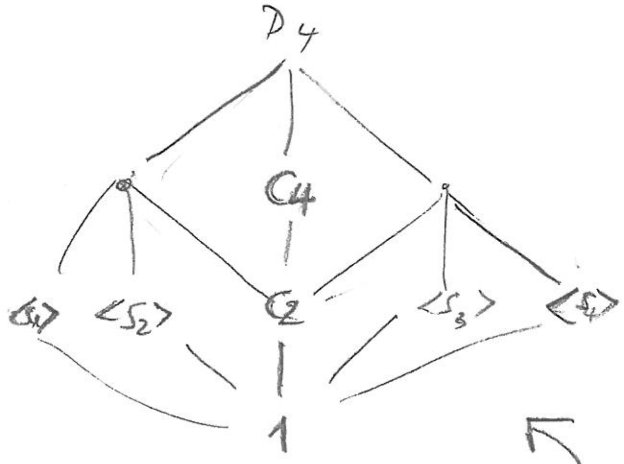
U_1 ist nicht normal in G, da $\mathbb{Q}(\omega) \supseteq \mathbb{Q}$ keine Galoiserw.

Sei $t \in G$ mit $t^2 = 1$, dann $tU_2t = U_2$, $U_2 = \langle z \rangle$, $tzt = z^{-1}$, $z^5 = 1$

$\longrightarrow \langle U_2, t \rangle \cong D_{10}$.

A 4 Blatt 13 $G = \mathrm{Gal}(f) \cong$ Diedergruppe der Ordnung 8, bereits bekannt.

Satz 15.9 (Hauptsatz):
$\exists$ inklusionsumkehrende Bijektion zwischen Zwischenkörpern und Untergruppen von D_4.

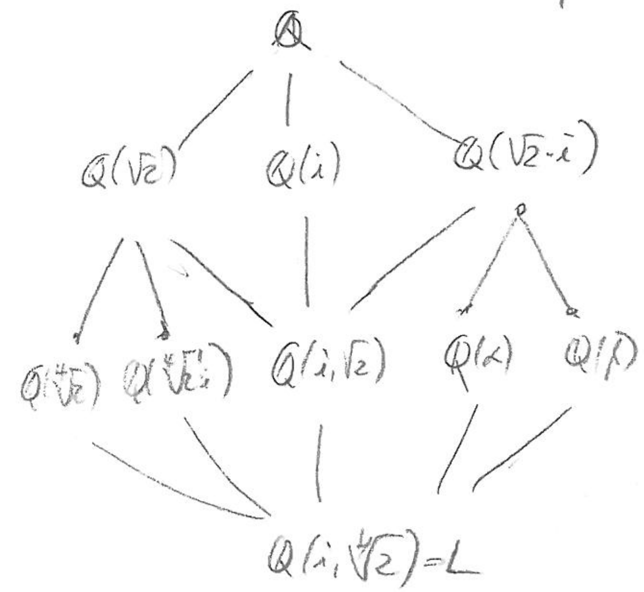


C_4 = Drehgruppe $= \langle t \rangle$

s_i = Spiegelungen, $1 \le i \le 4$

$D_4 = \langle t, s_i ; t^4, s_i^2, s_i t s_i = t^{-1} \rangle$
mit Erz. und Relationen

$\psi : \mathfrak{M}(L/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{U}(G)$



$\alpha = \sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$

$\rightarrow \alpha^2 = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

$\beta = \sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$

$\rightarrow \beta^2 = \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$\longrightarrow$ Jede $Z \subset L$ liegt in einer Kette sukzessiver Grade 2 und ist daher nach 18.4 mit Z. und L. konstruierbar

(muss auch so sein, da G = 2-Gruppe)